Zusammenstellung von Quantensysteme.

Zwei Quantensysteme : Zustandsräume $\mathcal{H}_A$ & $\mathcal{H}_B$

Regel: In der Quantenmechanik liegt der Zustand des Gesamtsystems im Zustandsraum

$$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \qquad (\text{Tensorproduktraum})$$

Wenn System A in Zustand $|a\rangle$ ist, und System B in Zustand $|b\rangle$, dann ist das Gesamtzustand

$$|a\rangle \otimes |b\rangle \, .$$

Tensorprodukt.

* Mathematische Def. (mit bilinearen Formen etc.)
  → schwierig, ein gute Vorstellung sich zu fassen
* Praktische Def.: $\{|\psi_i^A\rangle\}$ Basis von $\mathcal{H}_A$; $\{|\psi_j^B\rangle\}$ Basis von $\mathcal{H}_B$

  Def:
  $$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B = \text{Span}\,\{ \underbrace{|\psi_i^A\rangle \otimes |\psi_j^B\rangle}_{\text{"neuen", "kombinierten" kets}} \}$$

  ie. Tensorproduktraum = Span aller kombiationen der beiden Basiselementen

* Def soll unabhängig von Wahl der Basen $\{|\psi_i^A\rangle\}, \{|\psi_j^B\rangle\}$. → Verlange:
  * $(\lambda|a\rangle) \otimes |b\rangle = |a\rangle \otimes (\lambda|b\rangle) = \lambda(|a\rangle \otimes |b\rangle)$
  * $(|a\rangle + |b\rangle) \otimes |c\rangle = |a\rangle \otimes |c\rangle + |b\rangle \otimes |c\rangle$
  * $|a\rangle \otimes (|b\rangle + |c\rangle) = |a\rangle \otimes |b\rangle + |a\rangle \otimes |c\rangle$

* Notation: oft wird statt $|a\rangle \otimes |b\rangle$: $|ab\rangle$, $|a\rangle|b\rangle$, ... notiert.

Bemerkung: Notation in Komponenten: $|a\rangle = \sum_i a_i |\psi_i^A\rangle$, $|b\rangle = \sum_j b_j |\psi_j^B\rangle$

→ Komponenten von $|a\rangle \otimes |b\rangle$ in der Basis $\{|\psi_i^A\rangle \otimes |\psi_j^B\rangle\}$ sind

$$c_{ij} = a_i b_j$$

$$\left[|a\rangle \otimes |b\rangle = \left(\sum_i a_i |\psi_i^A\rangle\right)\left(\sum_j b_j |\psi_j^B\rangle\right) = \sum_{ij} \underbrace{a_i b_j}_{c_{ij}} |\psi_i^A\rangle |\psi_j^B\rangle . \right]$$

(→ wie Tensoren in der Relativitätstheorie z.B. $T^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma..} = A^\mu B^\nu C_{\rho\sigma..}$)

Beispiel: Zwei Spin-½ Teilchen.

Teilchen #1 (A) : Basis : $|\uparrow_A\rangle, |\downarrow_A\rangle$

Teilchen #2 (B) : Basis : $|\uparrow_B\rangle, |\downarrow_B\rangle$

Mögliche Gesamtzustände :

$$|\psi_{AB}\rangle = \alpha |\uparrow_A\rangle|\uparrow_B\rangle + \beta |\uparrow_A\rangle|\downarrow_B\rangle + \gamma |\downarrow_A\rangle|\uparrow_B\rangle + \delta |\downarrow_A\rangle|\downarrow_B\rangle$$

z.B. $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow_A \downarrow_B\rangle - |\downarrow_A \uparrow_B\rangle\right)$ Bell-Zustand oder EPR-Paar

Übung: $\nexists$ $(|a\rangle, |b\rangle)$ so dass $|\Psi^-\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$!!

→ Es gibt Zustände, die sich nicht als einfaches Produkt separater Zustände schreiben lassen !

→ Tensorproduktraum ist sehr (exponentiell) gross ! → erhält alle mögliche Superpositionen von allen möglichen Kombinationen der einzelnen Basiskets.

Beispiel 2. Spin-½ Teilchen, mit Wellenfunktion.

Spin-½ Teil: Basis $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$

Ortsteil: $\psi(x)$ z.B. "Basis" $|\psi_{\vec{k}}\rangle$: $\psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = \langle \vec{x}|\psi_{\vec{k}}\rangle$ $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$

Gesamt: $$|\Psi\rangle = \int d^3\vec{k} \sum_{s=\uparrow,\downarrow} c_{\vec{k},s}\, |\psi_{\vec{k}}\rangle |s\rangle$$

$$|\Psi\rangle = \underbrace{\int d^3\vec{k}\, c_{\vec{k},\uparrow}\, |\psi_{\vec{k}}\rangle}_{=:|\psi_\uparrow\rangle} |\uparrow\rangle + \underbrace{\int d^3\vec{k}\, c_{\vec{k},\downarrow}\, |\psi_{\vec{k}}\rangle}_{=:|\psi_\downarrow\rangle} |\downarrow\rangle$$

→ Das System wird durch ein Doppel-Wellenfunktion beschrieben:

$$\Psi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow(x) \\ \psi_\downarrow(x) \end{pmatrix}$$

ie. das Teilchen hat (gleichzeitig) zwei Wellenfunktionen.

(diese müssen nicht individuell normiert sein, sonst nur zusammen die Bed. $\int |\psi_\uparrow(x)|^2 + \int |\psi_\downarrow(x)|^2 = 1$ erfüllen.)

$(\hat{=} \langle \Psi|\Psi\rangle \overset{!}{=} 1)$

Bem: Mit dem Tensorprodukt stellt man nicht nur physikalisch unterschiedliche Systeme zusammen (z.B. 2 Teilchen), sonst auch verschiedene "Sektoren" oder Freiheitsgrade z.B. eines Teilchens, z.B.:

* Teilchen mit Spin
* Standardmodell: Elementare Teilchen mit Wellenfunktion, Spin, Isospin, flavor, Farbe (quarks), ...