Sphärisch-Symmetrische Potentiale

Hamiltonian: $$H = \frac{p^2}{2m} + V(r)$$
$r = |\vec{r}|$

$\rightarrow$ Eigenzustände / Eigenwerten?

Sphärische Symmetrie $\rightarrow$ $[H, L_i] = 0$

$\Rightarrow$ Eigenräume von L_i sind kompatibel mit den Eigenräumen von H.

Für ein System beschrieben durch eine Wellenfunktion $\psi(x)$:

- Eigenzustände von L^2 & L_z gegeben durch Kugelfunktionen: (Spherical Harmonics)

$$L^2 Y_{\ell,m} = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_{\ell,m}$$
$$L_z Y_{\ell,m} = \hbar m Y_{\ell m}$$

Separationsansatz $\rightarrow$ Allgemeine Eigenfunktionen von H sind der Form:

$$\psi_{\ell,m,n}(r,\vartheta,\varphi) = R_n^\ell(r)\, Y_{\ell,m}(\vartheta,\varphi)$$
innerhalb von jede (ℓ,m)-Sektor

Form von $R(r)$ hängt von der Form des Potentials $V(r)$ ab.

Radial-Teil der Schrödingergleichung:

mit $\Delta = \partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r + \frac{L^2}{\hbar^2 r^2}$; $L^2 = \frac{\hbar^2}{\sin^2\vartheta}\partial_\varphi^2 + \frac{1}{\sin\vartheta}\partial_\vartheta \sin\vartheta\, \partial_\vartheta$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r\right) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2} + V(r)\right] R(r) = E R(r)$$

Ansatz: $$R(r) = \frac{u(r)}{r} \xrightarrow{(\dots)} \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_r^2 + \underbrace{\frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2mr^2} + V(r)}_{V_{eff}(r)}\right] u(r) = E u(r)$$

$\rightarrow$ Wie ein 1-D Teilchen im Potential $V_{eff}(r)$!

z.B. Grenzfälle :

$r \to 0$: $(\ldots)$ $u \sim r^{l+1}$

$r \to \infty$: $(\ldots)$ $u \sim e^{-\alpha r}$ $\alpha = \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar}$

Wasserstoffatom : $V(r) = -\frac{e^2}{r}$

$(\ldots) \rightsquigarrow E_n = -\frac{E_R}{n^2}$ $E_R \approx 13.6$ eV

$$\psi_{n,l,m}(r,\vartheta,\varphi) = R_n^l(r)\, Y_{l,m}(\vartheta,\varphi)$$

Laguerre-Polynome + etc. …

Kugelfkt