Nicht-Stationäre Störungstheorie – Überblick.

Ziel: * Übergangswahrscheinlichkeiten, Zerfallrate, etc. rechnen.
* Ein Formalismus aufbauen → basis für QFT

Merkung: Wir mussen die Störung irgendwie einschalten. Bei stationäre Hamiltonians → periodische unitäre Evolution $e^{-iE_k t}|\psi_k\rangle$
→ kein Zerfall / Übergang / ..

Zutaten:

* Wechselwirkungs-Bild (Dirac) → geeignet für Störungstheorie
* Entwicklung des Zeitevolution-Operators $\mathcal{U}(t)$

WW-Bild:
$$H = H_0 + W(t)$$

$$A_D(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t} A_S(t)\, e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t}$$ → evolution der Operatoren mit H_0

$$|\psi_D(t)\rangle = \underbrace{e^{+\frac{i}{\hbar}H_0 t}}_{\text{inverse Zeitevol. von } H_0} \underbrace{|\psi_S(t)\rangle}_{\text{volle Zeitentw.}}$$ → evolution der Zustände ↔ $W(t)$

Bilder:	Schrödinger	Dirac (WW)	Heisenberg
$\|\psi\rangle$ evol. mit	H	W	-
A evol. mit	-	H_0	H

$$|\psi_D(t)\rangle = \underbrace{\mathcal{U}_D(t)}_{\text{WW-Dynamik}}\, |\psi_D(t)\rangle$$

mit $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}_D(t) = W_D(t)\,\mathcal{U}_D(t)$

$$W_D(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t}\, W(t)\, e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t}$$

Entwicklung von $\mathcal{U}(t)$: (eg. $\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}_D(t)$)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle \quad \longrightarrow \quad |\psi(t)\rangle = \mathcal{U}(t) |\psi(0)\rangle$$

Was ist $\mathcal{U}(t)$ im Allgemein? → Zeit-geordnete Exponentielle

$$\underline{\mathcal{U}(t) = T \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t H(t')\,dt'\right\}} \qquad (\exp \to \text{Entwicklung} \ldots)$$

mit Zeitordnung $T\{H(t_1)\,H(t_2)\} = \begin{cases} H(t_1)\,H(t_2) & t_2 < t_1 \\ H(t_2)\,H(t_1) & t_1 < t_2 \end{cases}$

und die nützliche Formel

$$\boxed{\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \{\ldots\} = \frac{1}{n!}\left(\prod_{i=1}^{n} \int_0^t dt_i\right) T\{\ldots\}}$$

Idee: diese Entwicklung benutzen, um $\mathcal{U}_D(t)$ zu approximieren.

Konkrete Frage: Amplitude Transition $|i\rangle \to |f\rangle$? $(|i\rangle \neq |f\rangle)$

Eigenenergiezustände mit En. e_i & e_f (zu H_0)

$$A_{i\to f}(t) = \langle f | \psi_S(t)\rangle \quad \text{mit} \quad |\psi_S(t=0)\rangle = |i\rangle$$

WW-Bild: $|\psi_S(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t} |\psi_D(t)\rangle$ →

$$\langle f | \psi_S(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}e_f t} \underbrace{\langle f | \mathcal{U}_D(t) | i\rangle}_{=?}$$

→ Entwicklung von $\mathcal{U}_D(t)$. [mit $W_D(t)$]

1. Ordnung in W →

$$\langle f | \psi_D(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}\int_0^t dt'\, e^{i\omega_{fi}t'}\, W_{fi}(t')$$

$\omega_{fi} = \frac{e_f - e_i}{\hbar}$

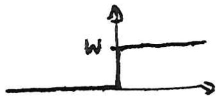
$W_{fi}(t') = \langle f | W(t') | i\rangle$

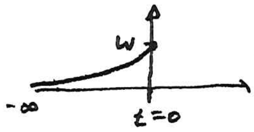
Matrixelemente der Störung

→ $\underline{P_{i\to f}(t)} = |\langle f | \psi_S(t)\rangle|^2 = |\langle f | \psi_D(t)\rangle|^2$

$$\boxed{= \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_0^t dt'\, e^{i\omega_{fi}t'}\, W_{fi}(t')\right|^2}$$

Um weiter zu rechnen, brauchen wir ein Modell, wie wir die Störung einschalten, z.B.:

* Abrupt  (sudden turn-on)

* Adiabatisch  $\sim e^{\eta t}$, $\eta \to 0$ (slow turn-on)

In jeder Fall:

$$P_{i\to f}(t) = \frac{1}{\hbar^2} |W_{fi}|^2 \, F(t, \omega_{fi}) \qquad \text{z.B. } F(t,\omega) = \begin{cases} \left(\dfrac{\sin\frac{\omega t}{2}}{\omega/2}\right)^2 & \text{Abrupt} \\[2ex] \dfrac{e^{2\eta t}}{\omega^2+\eta^2} & \text{Adiabatisch} \end{cases}$$

Für $t \gg 0$, $\frac{d}{dt}F \longrightarrow 2\pi\,\delta(\omega)$ (...)

→ Resultat für $t \gg 0$ für eine Störung W:

$$\frac{d}{dt} P_{i\to f}(t) \equiv \Gamma_{fi}(t) = \frac{2\pi}{\hbar^2} |W_{fi}|^2 \, \delta(\omega_{fi}) = \frac{2\pi}{\hbar} |W_{fi}|^2 \, \delta(E_f - E_i)$$

Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit (universelles Resultat)

→ Für verschiedene Endzustände $\{f\}$ (kontinuierlich)

$$P_{i\to\{f\}}(t) = \sum_{f\in\{f\}} P_{i\to f}(t) = \int_{\{f\}} dE_f \, \underbrace{\rho(E_f)}_{\#\text{ Zustände mit En. } E_f \,=\, \text{Zustandsdichte}} \, P_{i\to f}(t)$$

$$\to \quad \Gamma_{i\to\{f\}}(t) = \frac{2\pi}{\hbar} \int dE_f \, \rho(E_f) \, \Gamma_{i\to f}(t) = \frac{2\pi}{\hbar} |W_{fi}|^2 \, \rho(E_f)$$

FERMI's GOLDENE REGEL