EPR & Verschränkung

Betrachte 2 Spin-½ Teilchen, im Zustand

$$|\Phi^+_{12}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle + |\downarrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle\right)$$

(Bell-Zustand oder (EPR-Zustand) ↳ $|\Psi^-_{12}\rangle$)

Übung 1: Zeige: $\nexists\, (|a\rangle, |b\rangle): \ |\Phi^+_{12}\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$

Korrelierter Zustand: Wenn 1. Teilchen in $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ Basis gemessen wird

→ Kollaps in $|\uparrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle$ oder $|\downarrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle$ (je mit W'keit ½)

→ Teilchen #2 ist immer im gleichen Zustand, als, bei Teilchen #1 gemessen wird.

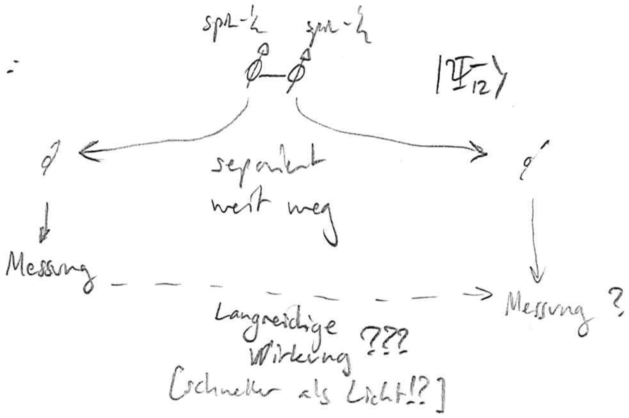
[Bis jetzt, nichts überraschend — wie Sekretärin mit Aufnahmebriefen]

Übung 2: Zeige: $|\Phi^+_{12}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+_1+_2\rangle + |-_1-_2\rangle\right)$ $\left[\,|\pm_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\uparrow_i\rangle \pm |\downarrow_i\rangle\right]\,\right]$

Auch bei Messung in der $|+\rangle, |-\rangle$ Basis sind die Messresultate maximal korreliert !!

[Gilt in alle Basen (bis a globale Phase) : Übung 3. [sehen, dass $U \otimes \mathbb{1}\, |\Phi^+_{12}\rangle = (\mathbb{1} \otimes U^T)\, |\Phi^+_{12}\rangle$]]

Einstein's Idee (EPR):



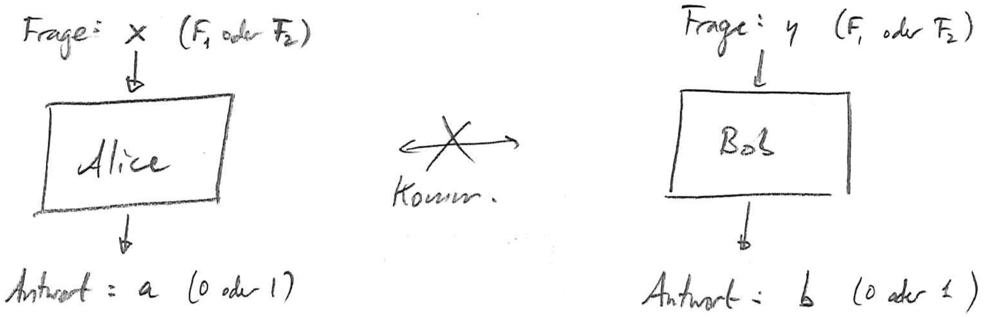
⇒ die Spins wissen im Voraus, wie sie gemessen werden müssen (Versteckte Variablen)

Bell 1964 → nicht möglich.

Ein Spiel. (Adaptierung von Bells Argument, CHSH 1969)

Alice & Bob spielen zusammen. Sie dürfen eine Strategie im Voraus vereinbaren. Dann werden sie voneinander isoliert → dürfen nicht mehr kommunizieren.

Sie bekommen beide eine Frage (zwei mögliche Fragen F_1 & F_2) und geben ein Ja/Nein Antwort (zwei möglichkeiten → 0 & 1)



Ziel des Spieles:

Alice & Bob gewinnen wenn:

für $x=y=F_1$: Gewinn wenn $a=b$ (egal 0 oder 1)

für $x=F_1, y=F_2$: $a=b$

$x=F_2, y=F_1$: $a=b$

$x=y=F_2$: $a\neq b$

(verlieren in den anderen Fällen)

Strategie von A & B.

A&B vereinbaren eine Strategie: im Allgemein:

$Pr(a|x)$ und $Pr(b|y)$ (bekannt von beide A & B)

noch besser (?): sie können zusammen ein zufälliges Zahl wählen λ

→ $Pr(a|x\lambda)$ und $Pr(b|y\lambda)$ (wie Einsteins Idee für die Spin-½ Teilchen)

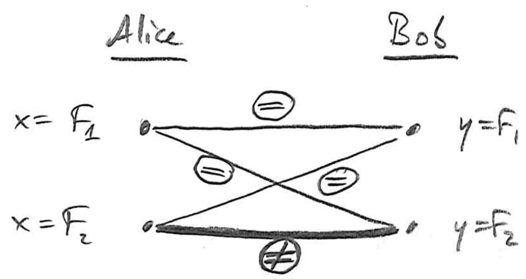
Also: $Pr(a,b\,|\,x,y) = \int d\lambda\, Pr(\lambda)\, Pr(a|x\lambda)\, Pr(b|x\lambda)$

(ohne λ: $Pr(a,b|x,y) = Pr(a|x)\,Pr(b|y)$)

Gewinn-Warscheinlichkeit:

$$Pr[\text{Gewinn}] = \frac{1}{4} Pr[a=b \mid x=F_1, y=F_1] + \frac{1}{4} Pr[a=b \mid x=F_1, y=F_2]$$
$$+ \frac{1}{4} Pr[a=b \mid x=F_2, y=F_1] + \frac{1}{4} Pr[\underline{a \neq b} \mid x=F_2, y=F_2]$$

Deterministe Strategie ohne λ: $P(a|x) = 0,1$ $\quad P(b|y) = 0,1$



($\lightning$ $\nexists$ det. Strategie, die immer gewinnen kann)

und $Pr[\text{Gewinn}] \leq \frac{3}{4}$ $\quad$ ($\leftrightarrow$ Bellsche Ungleichung)

Man kann zeigen, dass λ hilft nicht, sowie $P(a|x\lambda) \notin \{0,1\}$ auch nicht.

Mit der Quantenmechanik:

A & B behalten je ein Teilchen eines EPR-Paars im Zst. $|\Phi^+_{12}\rangle$
(geteilt als sie ihre Strategie vereinbaren haben)

Frage $\rightarrow$ Wahl von Messungsbasis $\quad$ mit $\begin{cases} |\vartheta\rangle = \cos\frac{\vartheta}{2}|\uparrow\rangle + \sin\frac{\vartheta}{2}|\downarrow\rangle \\ |\vartheta^\perp\rangle = \sin\frac{\vartheta}{2}|\uparrow\rangle - \cos\frac{\vartheta}{2}|\downarrow\rangle \end{cases}$

Alice

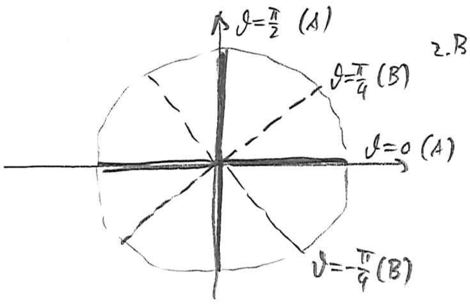
$F_1 \rightarrow \{|0\rangle, |1\rangle\}$ $\quad (\vartheta = 0)$

$F_2 \rightarrow \{|+\rangle, |-\rangle\}$ $\quad (\vartheta = \frac{\pi}{2})$

Bob

$F_1 \rightarrow \{|\vartheta\rangle, |\vartheta^\perp\rangle\}$ $\quad \vartheta = \frac{\pi}{4}$

$F_2 \rightarrow \{|\vartheta\rangle, |\vartheta^\perp\rangle\}$ $\quad \vartheta = -\frac{\pi}{4}$



z.B. Polarisationsmessung auf Photon

Jetzt $\rightarrow Pr[\text{Gewinn}]$ $\quad \cos^2\frac{\pi}{8}$

$= \underset{\text{Übung}}{(\ldots)} \approx \underline{0.85} > \frac{3}{4}$!!

$\boxed{\rightarrow \text{QM kann nicht mithilfe von lokale versteckte Variablen beschrieben/erklärt werden}}$ $\quad$ Bell Theorem