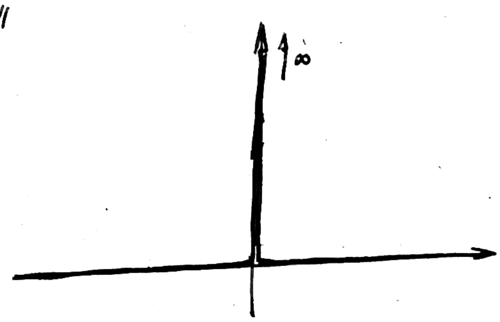
1

Dirac Delta-Funktion und Fouriertransformation

Idee: Dirac-δ ~ "Funktion": $\begin{cases} 0 & \text{überall} \\ \infty & x=0 \end{cases}$



- **Definition:** $\delta(x)$: (definierende Eigenschaft)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, g(x)\, dx = g(0) \qquad (\text{für alle Fkt } g(x))$$

Kann nicht mit $\delta \in \{\text{Fkt}(\mathbb{R} \to \mathbb{R})\}$ erreicht werden.

$\rightsquigarrow$ δ hat nur Sinn im Integral

Idee: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \cdot dx$ als ein "Objekt" betrachten, d.h. als ein Funktional $D : \{g : \text{Fkt}\} \to \mathbb{R}$ mit definierende Eigenschaft

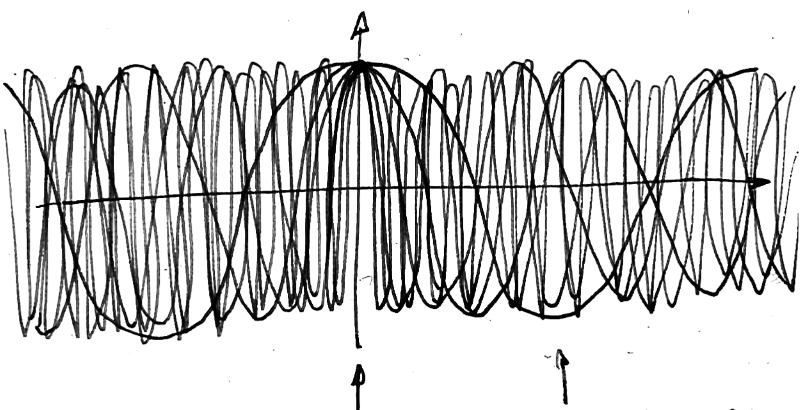
$$D[g] = g(0)$$

oft: Schwarz-Raum $= \{ g \in C^\infty(\mathbb{R}),\ g^{(n)} \text{ schnell abfallend } \forall n \}$
auf jeden Fall: "sehr schönen Funktionen"

g heisst eine Test-Funktion.

Fourier:

$\to$ Was ist die (inverse) Fouriertransformation von $\tilde{f}(k) = 1$, i.e. eine uniforme Superposition aller Wellen?

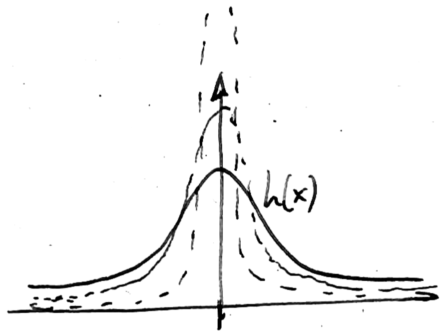


"Enorme" konstruktive Interferenz

verschiedene Wellen gleichen sich einander aus (destruktive Interferenz)

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\, dk = 2\pi \cdot \delta(x)$$

- Als Limes von Funktionen.



Viele mögliche Darstellungen. Oft nimmt man eine Glockenformige Funktion $h(x)$ mit $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) = 1$ und dann, für $n \to \infty$

$$h_n(x) := n\, h(nx) \longrightarrow \delta(x)$$

im Sinn, dass $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x)\, g(x) = g(0)$

für alle Test-Funktionen $g(x)$.

- Als verallgemeinerung des Kronecker δ_{ij}.

Identitätsmatrix im Komponenten $\longrightarrow (\mathbb{1})_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$

z.B. • $y = \mathbb{1}x = x \;\rightarrow\; y_i = \sum_j (\mathbb{1})_{ij}\, x_j = \sum_j \delta_{ij}\, x_j = x_i$

- eine orthonormale Basis $\{v_i\}$ erfüllt $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$

Jetzt: Verallgemeinerung $v \in \mathbb{C}^n \longrightarrow \psi \in L^2(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$ (z.B.)
$(= \{\text{Fkt}: \{1,\dots,n\} \to \mathbb{C}\})$

Dann $\varphi = \mathbb{1}\psi \longrightarrow \varphi(x) = \int \delta(x-y)\, \psi(y)\, dy = \psi(x)$

ie. $\delta(x-y)$ sind die "Komponenten" von $\mathbb{1}$ in dieser Basis.

Eine orthonormale "Basis" erfüllt (z.B. $\psi(x) = e^{ikx}$)

$$\langle \psi_k, \psi_{k'}\rangle = \delta(k-k')$$
$$\hookrightarrow = \int \psi_k^*(x)\, \psi_{k'}(x)\, dx$$

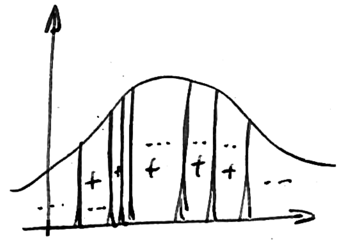
- **Als "Basis" von Funktionen, Greens Fkt.**

Wie ein Vektor sich in Komponenten bzgl. eine Basis $\{e_i\}$ schreiben lässt,

$\vec{v} = \sum v_i e_i$,

Lässt sich eine funktion f wie folgendes schreiben:

$$f(x) = \int \underbrace{f_y}_{\substack{\text{Koeffiziente} \\ (y \in \mathbb{R})}} \underbrace{\delta(x-y)}_{\text{Basis-Elemente}} \, dy$$



Wieso ist das nützlich? z.B. Greens Funktionen.

Gegeben eine diff. Gl. $D\,\varphi(x) = \rho(x)$

D: linearer diff. Operator

z.B.: Gravitationsfeld $\Delta\varphi(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \dots\right)\varphi(x) = 4\pi G\,\rho(x)$ ← Massendichte

Elektrisches Feld $\Delta\varphi(x) = \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}$ ← Ladungsdichte

Schrödinger, Wellengleichung, ...

Idee: $\rho(x) = \int \rho(y)\,\underline{\delta(x-y)}\,dy$.

Wenn wir das (warscheinlich einfachere) Problem $D\,\varphi_y(x) = \underline{\delta(x-y)}$ gelöst haben, dann folgt $\underline{\varphi(x) = \int \rho(y)\,\varphi_y(x)\,dy}$ als Lösung der ursprünglichen diff. Gl.

Denn:

$$D \int \rho(y)\,\varphi_y(x)\,dy = \int \rho(y)\left(D\,\varphi_y(x)\right)dy = \int \rho(y)\,\delta(x-y)\,dy = \rho(x)$$

→ Um die diff. Gl. $D\,\varphi(x) = \rho(x)$ zu lösen, reicht es die einfachere Gleichung $\underline{D\,\varphi(x) = \delta(x-y)}$ zu lösen.

Nützliche Eigenschaften.

- $\delta(-x) = \delta(x)$
- $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$
- $\int \delta(x) f(x) = f(0)$

  $\left(\rightarrow \int \delta(x)\, dx = 1 \right)$

- $F.T.\left(\delta(x)\right) = 1$ (oder 2π, Konvention-Abhängig)
- $\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} \right|^{-1} \delta(x - x_i)$ $\quad x_i$: Nullstellen von $f(x)$